Донецкий национальный технический университет

ПРИБЛИЖЕННАЯ РАЗВЕРТКА ТОРА С МИНИМИЗАЦИЕЙ ОТХОДОВ

В статье рассматриваются проблемы “одевания” торовой поверхности материалом, выполненным в виде сплошной прямоугольной полосы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тороидальные координаты, развертка, минимизация отходов.

Тор – неразвертываемая поверхность, проблема его “одевания”, в какой либо материал, заключается в аппроксимации торовой поверхности отсеками развертываемой поверхности, построении разверток этих отсеков и определении порядка фиксации их на торе.

Важными условиями решения проблемы являются учет толщины одеваемого материала и обеспечение минимизации отходов при условии, что развертываемые отсеки располагаются на сплошной полосе материала.

Параметрические уравнения тора [1, 2]:

$$x = (R + v \cos u) \cos t, \quad y = (R + v \cos u) \sin t, \quad z = v \sin u \quad (1)$$

С учетом толщины материала b , параметрические уравнения его теоретической поверхности после “одевания”:

$$x = [R + (v + b) \cos u] \cos t, \quad y = [R + (v + b) \cos u] \sin t, \quad z = (v + b) \sin u \quad (2)$$

Разделим теоретическую поверхность тора плоскостями, которые проходят через ось тора на $4n$ конгруэнтных отсека (рис. 1) два соседних отсека аппроксимируем цилиндрами так, чтобы линия их стыка была нормальным сечением, а отсеки образующих между нормальным сечением и крайевыми контурами будем представлять равными спрямленным дугам соответствующих параллелей тора. Отклонение крайевых контуров от торовой поверхности будет тем большим, чем меньше n . Складчатость одеваемого материала также увеличивается в направлении от нормального сечения к крайевым контурам обратно пропорционально n .

Для получения уравнений краевых контуров аппроксимирующих цилиндров используем формулу дифференциала дуги линии, которая принадлежит торовой поверхности [2]:

$$ds^2 = Edu + 2Fdudt + Gdt^2, \quad (3)$$

$$\text{где } E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = (v+b)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = [R + (v+b)\cos u]^2 \quad - \text{ коэффициенты}$$

первой квадратичной формы поверхности (2).

Длина координатной линии $u=\text{const}$ вычисляем воспользовавшись формулой (3) при $du=0$:

$$S_1 = \int_0^t [R + (v+b)\cos u] dt = [R + (v+b)\cos u] t \quad (4)$$

Длина координатной линии $t=\text{const}$ вычисляется по формуле (3) при $dt=0$:

$$S_1 = \int_0^u (v+b) du = (v+b) u \quad (5)$$

Согласно предварительным условиям, линия стыка, как контур нормального сечения аппроксимирующего цилиндра, разворачивается в прямую, которую примем за ось OY . Образующие цилиндра на развертке будут перпендикулярны оси OY , а длина их отрезков, между нормальными и краевыми контурами, равняется $[R + (v+b)\cos u] \frac{R}{2n}$. Таким образом, параметрические уравнения краевых контуров с учетом (3) и (4):

$$X = \pm [R + (v+b)\cos u] \frac{\pi}{2n}, \quad Y = (v+b) u, \quad -\pi \leq u \leq \pi \quad (6)$$

Следующие отсеки поверхности (2), как и предыдущие, аппроксимируем таким же цилиндром, но его развертку будем координировать по другому. Переместим начало координат вдоль линии $t=\text{const}$ из точки $u=0$, где оно было в предыдущем случае, в точку $u=\pi$, то есть установим начало координат развертки в точке, которая принадлежит параллели максимального радиуса теоретической поверхности (2).

Параметрические уравнения краевых контуров аппроксимирующего цилиндра на развертке приобретают вид [3]:

$$X = \pm [R + (v + b) \cos (\pi + u)] \frac{\pi}{2n}, \quad Y = (v + b)(\pi + u), \quad -\pi \leq u \leq \pi \quad (7)$$

Найдем сумму отрезков которые равны абсциссам кривых (6) и (7)

$$[R + (v + b) \cos u] \frac{\pi}{2n} + [R + (v + b) \cos (\pi + u)] \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi R}{n}$$

Полученная сумма постоянна и она не зависит от u . Это означает, что расположив ось O_1Y_1 (рис. 2) на расстоянии $\frac{\pi R}{n}$ от оси OY и построив развертки цилиндров (6) и (7), с отнесением развертки первого цилиндра к системе XOY , а второго к системе $X_1O_1Y_1$, получим полное совпадение боковых контуров $X>0$ и $X_1<0$.

С учетом приведенных расчетов технология раскроя материала для “одевания” тора состоит в следующем:

- выкроить из материала полосу длиной $2\pi R$, шириной $2\pi(v + b)$;
- нанести на полосу поочередно развертки цилиндров (6) и (7), начиная и заканчивая развертками полуцилиндров (6) рисунок 3;
- раскроить полосу, разрезанием по боковым линиям стыка;
- зафиксировать на поверхности тора (1) выкройки $2n - 1$ цилиндров, чередуя цилиндры (6) и (7);
- закончить “одевание” тора фиксацией на нем выкроек двух неполных цилиндров (6).

Складки, появившиеся около боковых линий стыка, можно уменьшить, взяв большее число отсеков n , либо вырезанием клиньев уже непосредственно при самом “одевании”.

Nesnov D.V.

Donetsk national technical university

APPROXIMATE SCAN TORUS WASTE MINIMIZATION

In article problems of "clothing" of a torovy surface are considered by the material executed in the form of a continuous rectangular strip.

KEYWORDS: toroidal coordinates, development, minimization of waste.

Литература

1. Скидан И.А., Коломиец Е.А. Нормальные тороидальные координаты и их приложение в математическом моделировании поверхностей. // Сборник работ международной научно-практической конференции, посвященной 200-летию создания начертательной геометрии. “Сучасні проблеми геометричного моделювання”. – Харків: - 1998. - Ч.ІІ. – С. 19-23.

2. Коломец О.А. Математические и компьютерные модели поверхностей в специальных нормальных координатах: Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. - Донецк, 2000. – 219 с.

3. Неснов Д.В Геометрическое моделирование полей в нормальных конических и нормальных тороидальных координатах: Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. – Донецк, 2004. – 200 с.